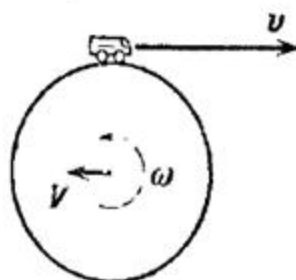


**16. Парадокс кинетической энергии.** Игрушечный автомобиль с полностью заведенной пружиной может разогнаться до скорости  $v$ . Пренебрегая потерями энергии на трение, можно считать, что потенциальная энергия заведенной пружины  $W$  целиком превратилась в кинетическую энергию игрушки. Рассмотрим этот же процесс в другой инерциальной системе отсчета, которая движется со скоростью  $v$  относительно Земли навстречу игрушечному автомобилю. В этой системе отсчета окончательная скорость игрушки равна  $2v$ , т. е. вдвое больше, а ее кинетическая энергия в четыре раза больше, т. е. равна  $4W$ . Так как в этой системе отсчета автомобиль с самого начала имел кинетическую энергию  $W$ , то в результате раскручивания пружины его кинетическая энергия возросла на  $3W$ , а не на  $W$ , как в исходной системе отсчета. Между тем потенциальная энергия заведенной пружины в обоих случаях равна  $W$ ! Объясните этот парадокс.

△ Парадокс возникает потому, что в приведенных рассуждениях не учитывалась кинетическая энергия Земли и

Рис. 16.1. Разгоняясь, заводная игрушка сообщает Земле не только поступательное движение со скоростью  $V$ , но и вращение с угловой скоростью  $\omega$



ее изменение при взаимодействии колес игрушки с дорогой. Если же это изменение учесть аккуратно, то никакого парадокса вообще не возникает и закон сохранения энергии, разумеется, оказывается выполненным.

Рассмотрим сначала систему отсчета, в которой Земля неподвижна. В этой системе отсчета до разгона автомобиля полный импульс равен нулю. При разгоне автомобиля он приобретает скорость  $v$ , а Земля приобретает скорость  $V$ , направленную противоположно ( $V < 0$ ). Полный импульс системы остается неизменным, поэтому

$$mv + MV = 0, \quad (1)$$

где  $m$  — масса игрушки,  $M$  — масса Земли.

Так как действующая на Землю со стороны колес игрушки сила не проходит через центр Земли, то кроме поступательного движения со скоростью  $V$  Земля приходит также и во вращение с некоторой угловой скоростью  $\omega$  (рис. 16.1). Забудем пока об этом вращении Земли и будем считать, что Земля движется только поступательно.

При раскручивании пружины ее потенциальная энергия  $W$  превращается в кинетическую энергию игрушки и Земли:

$$W = \frac{mv^2}{2} + \frac{MV^2}{2}. \quad (2)$$

Выражая  $V$  из уравнения (1) и подставляя в (2), находим

$$W = \frac{mv^2}{2} \left( 1 + \frac{m}{M} \right). \quad (3)$$

Так как масса игрушки  $m$  неизмеримо меньше массы Земли ( $m/M \ll 1$ ), то, как видно из формулы (3), практически вся энергия пружины превращается в кинетическую энергию игрушки.

Теперь рассмотрим тот же процесс с точки зрения второй системы отсчета, в которой скорость игрушки и Земли сначала равна  $v$ . Полный импульс в этой системе отсчета равен  $(m+M)v$ . После разгона скорость игрушки равна  $2v$ , а скорость Земли обозначим через  $V_1$ . На основании закона сохранения импульса

$$m(2v) + MV_1 = (m+M)v. \quad (4)$$

Кинетическая энергия игрушки после разгона равна  $m(2v)^2/2$ , а кинетическая энергия Земли есть  $MV_1^2/2$ . Изменение полной кинетической энергии

$$\Delta E = \frac{m(2v)^2}{2} + \frac{MV_1^2}{2} - \frac{(m+M)v^2}{2}. \quad (5)$$

Выразим  $V_1$  из уравнения (4) и подставим в (5):

$$\Delta E = 3 \frac{mv^2}{2} + \frac{M}{2} \left[ \left( 1 - \frac{m}{M} \right)^2 v^2 - v^2 \right]. \quad (6)$$

После простых алгебраических преобразований выражение (6) приводится к виду

$$\Delta E = \frac{mv^2}{2} \left( 1 + \frac{m}{M} \right). \quad (7)$$

Сравнивая правую часть (7) с формулой (3), видим, что и в этом случае изменение кинетической энергии всей системы равно потенциальной энергии пружины  $W$ .

Изменение кинетической энергии игрушки при разгоне в этой системе отсчета действительно в три раза больше, чем изменение этой энергии в системе отсчета, связанной с Землей. Однако теперь изменение кинетической энергии Земли такого же порядка, что и изменение энергии игрушки, в отличие от изменения энергии Земли в исходной системе отсчета, где оно было ничтожным. В новой системе отсчета колеса игрушки при разгоне тормозят движение Земли, и ее кинетическая энергия убывает. Увеличение кинетической энергии игрушки в этой системе отсчета происходит не только за счет потенциальной энергии пружины, но и за счет уменьшения кинетической энергии Земли.

Разобранный пример наглядно показывает, с какой осторожностью нужно подходить к вопросу о том, что существенно в рассматриваемом явлении, а чем можно пренебречь. Использовать можно любую систему отсчета, и при точном решении задачи выбор системы отсчета безразличен. Однако при нахождении приближенного решения пренебрежения, допустимые в одной системе отсчета, могут оказаться совершенно непригодными в другой. Так, в рассмотренном примере можно было пренебрегать изменением кинетической энергии Земли и считать, что изменение энергии автомобиля равно энергии пружины при использовании системы отсчета, связанной с Землей. Если пользоваться другой системой отсчета, то и при приближенном решении пренебрегать изменением кинетической энергии Земли нельзя, несмотря на то, что изменение скорости Земли, как легко убедиться, одинаково и в той, и в другой системе отсчета.

Обсудим теперь, что изменится в рассуждениях, если учитывать вызываемое игрушкой вращение Земли. В правой части формулы (2) кроме кинетической энергии поступательного движения Земли будет присутствовать еще и кинетическая энергия вращения Земли. Она будет такого же порядка величины, что и кинетическая энергия поступательного движения Земли. Поэтому в системе отсчета, где Земля была неподвижной, ею, как и энергией поступательного движения Земли, можно пренебречь и считать, что вся потенциальная энергия пружины превращается в кинетическую энергию игрушки.

Во второй системе отсчета (где скорости игрушки и Земли сначала равны  $v$ ) кинетическая энергия вращения Земли будет такой же, как и в первой системе отсчета, поскольку приобретенная Землей угловая скорость  $\omega$  одинакова во всех инерциальных системах отсчета. Поэтому, в отличие от кинетической энергии поступательного движения Земли, энергией вращения можно пренебречь и во второй системе отсчета. ▲